数理解析研究所講究録
286巻 1977年 19-39

Topologically stable unfoldings III

topologically stable singularities $\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$

千葉大理　福田　拓生

INTRODUCTION.　[F_1] 及び [F_2] において，関数及び写像芽の topologically stable unfolding の存在，唯一性 及び 余次元一定のときの位相型の有限性について考察した。次は実際に分類する段階である。本稿では unfolding の次元が 0 の topologically stable unfoldings すなわち topologically stable singularities の分類を試みる。

実際には，$\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ の解析的写像の位相安定特異点の分類がなされる。すなわち 次の定理を証明する。

定理（$\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ の holomorphic map の位相安定特異点）
$\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ の解析写像の位相安定特異点は次の(1)～(4) のいずれかに位相同型である。

(1) A_k, $k=0,1,\ldots,6$.
$$\begin{cases} y_i = x_i & i \le 5 \\ y_6 = x_6^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_6^i + x_7^2 + x_8^2 . \end{cases}$$

(2) D_4
$$\begin{cases} y_i = x_i & i \le 5 \\ y_6 = x_6^3 + x_6 x_7^2 + x_1 (x_6^2 + x_7^2) + x_2 x_6 + x_3 x_7 + x_8^2 \end{cases}$$

D_5
$$\begin{cases} y_i = x_i & i \le 5 \\ y_6 = x_6^4 + x_6 x_7^2 + x_1 x_6^2 + x_2 x_7^2 + x_3 x_6 + x_4 x_7 + x_8^2 \end{cases}$$

D_6
$$\begin{cases} y_i = x_i & i \le 5 \\ y_6 = x_6^5 + x_6 x_7^2 + x_1 x_6^2 + x_2 x_7^2 + x_3 x_6 + x_4 x_7 + x_5 x_6^3 + x_8^2 \end{cases}$$

(3) E_6
$$\begin{cases} y_i = x_i & i \le 5 \\ y_6 = x_6^3 + x_7^4 + x_1 x_6 + x_2 x_7 + x_3 x_7^2 + x_4 x_6 x_7 + x_5 x_6 x_7^2 + x_8^2 \end{cases}$$

(4) Æ
(予想)
$$\begin{cases} y_i = x_i & i \le 4 \\ y_5 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_1 x_5 + x_2 x_6 + x_3 x_7 + x_4 x_8 \\ y_6 = a x_5^2 + b x_6^2 + c x_7^2 + d x_8^2 \end{cases}$$

但し $\begin{pmatrix} 1, 1, 1, 1 \\ a\ b\ c\ d \end{pmatrix}$ の全ての小行列式 $\neq 0$

a, b, c, d がどのような値でも位相型は全て同じ.

注意1　(4) Æ型について (予想) とあるのは，(1)~(3)以外には，位相安定写像の特異点は唯一つしかも一つ存在することがわかる。(§2参照) がそれを今の所決定できずにいる。しかし ほぼこれがその(1)~(3)以外の安定特異点であることは確かである。その証明方法が§4で与えられるが，非常に煩雑で今の所途中までしか成功していない。

注意2. (1)~(3) は カタストロフィー，Arnold, Saito 等にでてくる A_k, D_k, E_k 型の versal deformation である。Æ は斉藤恭司氏の分類による Æ 型の deformation で，多分これは topologically versal deformation となっているはず。

さて特異点がいろいろある中で，特に $\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ の位相的に安定した特異点を分類することの背景を説明しよう。

J. Mather の安定性定理　M を compact m-dim 多様体，N を n 次元多様体とする。C^∞-stable な写像の集合が C^∞級写像全体の集合 $C^\infty(M,N)$ の中で稠密である必要十分条件は次元の組 (m,n) が次の不等式 1)—5) のうちの一つを満足することである。

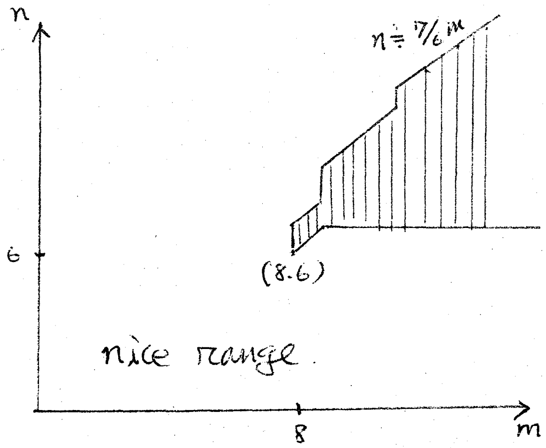
1)　$m < \frac{6}{7}n + \frac{8}{7}$　で　$n-m \geqq 4$

2)　$m < \frac{6}{7}n + \frac{9}{7}$　で　$3 \geqq n-m \geqq 0$.

3) $n<8$ で $n-m=-1$

4) $n<6$ で $n-m=-2$

5) $n<7$ で $n-m\leqq -3$



<u>J.Mather の分類定理</u> $g, f: (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ を C^∞-stable な写像芽とする。そのとき g と f が C^∞-同値になる必要十分条件は

$$Q_{n+1}(f) \cong Q_{n+1}(g) \quad (\text{環として同型})$$

となることである。ここに $Q_k(f) = Q(f)/m_m^{k+1}$, $Q(f) = \mathcal{E}_m / f^*(m_n)\mathcal{E}_m$, $\mathcal{E}_m$: $\mathbb{R}^m$の原点の近傍での C^∞級関数の原点における芽のなす環. m_m: $\mathcal{E}_m$の極大イデアル.

pair (m, n) が 安定性定理の 1)〜5) にあてはまるとき, (m, n) は nice-range にあるとよばれる。nice-range における特異点の分類は, 第一段階としては C^∞-stable map の特異点の分類で十分である。そしてそれは 上の分類定理で或る意味で完成している。所が nice-range に属さぬ所では, C^∞-stable 特異点で近似できぬ特異点が多数あるので,

C^∞-stable singularities の分類だけでは充分でない。所で，not-nice range における特異点の分類に関しては，今迄の所何の結果も得られていない。それで not-nice-range の中で一番次元の低い所 $\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^6$ の位相的に安定した特異点の分類をめざした。

所が結果は $\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ の特異点の分類になった。これは complex case の方が扱いやすかったことによる。real の場合は他にいくつの type があらわれるかわからぬが，これらは本質的に定理にあげられたものに同じになる。すなわちそれらの complexification は定理にあげられたものと位相同型になる。それで complex case のみで満足することにした。

目次

謝辞 斉藤恭司氏にいろいろ御教示いただきました。氏に

感謝いたします。

§1 諸定義

以後考えるのは全て complex analytic mapping である。

<u>記号1.1</u> $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$: $\mathbb{C}^m$の開集合で定義された解析関数の原点における芽のなす可換環とする。

$\mathcal{M}_m$: $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$ の極大イデアル。

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$ <u>に次のような位相を入れる</u>。$l>0$ とするとき、次の自然な1対1 対応を得る。

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}/\mathcal{M}_m^{l+1} \simeq P(m,l)=\{\deg \le l \text{ の } m \text{ 変数の多項式}\}$$
$$\simeq \mathbb{C}^N$$

従って $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}/\mathcal{M}_m^{l+1}$ には、従って $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$ には、$\mathbb{C}^N$ からの位相が自然に導入される。$l=1,\cdots\to\infty$ にわたるとき、これらの位相での開集合全てを open base とする位相を $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$ ~~とする~~に入れる。(これは結局 C^∞-topology と一致する。)

$\mathcal{O}_{m,n}=\{$ hol. map germs $f:(\mathbb{C}^m,0)\to\mathbb{C}^n\}=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}\times\cdots\times\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$ に直積空間としての位相を入れる。

$p\in\mathbb{C}^m$, $q\in\mathbb{C}^n$ とするとき、

$\mathcal{O}_{m,n}(p,q)=\{f:(\mathbb{C}^m,p)\longrightarrow(\mathbb{C}^n,q)$ hol. map-germs$\}$
にも同様の位相を入れる。

以後 写像芽とその代表元たる写像をあまり区別しない。

<u>定義1.2</u> $f\in\mathcal{O}_{m,n}(p,q)$ と $g\in\mathcal{O}_{m,n}(p',q')$ が <u>解析的</u>(resp. <u>位相的</u>)に <u>同型</u> であるとは 解析的同型写像(resp. 位相同型写像) $h:(\mathbb{C}^m,p)\to(\mathbb{C}^m,p')$ 及び $h':(\mathbb{C}^n,q)\to(\mathbb{C}^n,q')$ が存在して次の図式が可換になるときにいう。

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^m,p) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & (\mathbb{C}^n,q) \arrow[d, "h'"] \\
(\mathbb{C}^m,p') \arrow[r, "g"] & (\mathbb{C}^n,q')
\end{tikzcd}$$

$f\in\mathcal{O}_{m,n}(p,q)$ が <u>解析的安定写像(resp. 位相的安定)芽</u> であるとは, p の任意の近傍 $U(p)$ に対して f の近傍 $N(f)\subset\mathcal{O}_{m,n}(p,q)$ が存在して次の条件をみたすときにいう。

(条件) その定義域が $U(p)$ を含むような任意の $g\in N(f)$ に対して 点 $p'\in U(p)$ が存在して, $f\in\mathcal{O}_{m,n}(p,q)$ と $g\in\mathcal{O}_{m,n}(p',g(p'))$ が 解析的(位相的)に同型になる。

定義1.3 r-jet $z\in J^r(m,n)$ が C^ω(resp C^0)-sufficient であるとは, $j^rf(0)=j^rg(0)=z$ なる任意の $f,g\in\mathcal{O}_{m,n}$ が互に解析的(resp 位相的)同型になるときにいう。

§2 余階数 ≧ 2 の位相安定写像の唯一性

$f:(\mathbb{C}^m,0)\longrightarrow(\mathbb{C}^n,0)$, $m\geq n$, に対して

$$\mathrm{Corank}\, f = n - \text{rank of Jacobian matrix of } f \text{ at } 0$$

とおく。 $S_i=\{j^1f(0)\in J^1(m,n)\mid f \text{ の corank} = i\}$
とおけば，S_i は $J^1(m,n)=\{(m,n)$ 行列全体$\}$ の中で，余次元 $i(i+m-n)$ の complex manifold となる。特に $m=8$, $n=6$ のとき

$$\mathrm{codim}\, S_1 = 3,\quad \mathrm{codim}\, S_2 = 8,\quad \mathrm{codim}\, S_i \geq 15 \quad \text{if } i\geq 3$$

となる。故に $\mathrm{codim}\,(J^1(m,n)-S_1\cup S_2)=\mathrm{codim}\,\overline{S_3}=15$.
従って Thom の横断性定理によると 次のことが得られる。

PROPOSITION ~~1.1~~ 2.1 corank ≧3 の $\mathbb{C}^8\to\mathbb{C}^6$ の位相安定特異点は存在しない。

従って，$\mathbb{C}^8\to\mathbb{C}^6$ の位相安定特異点を分類するには，corank ≦2 の特異点を分類すればよい。corank 2 の位相安定特異点の唯一性は 次の C^0-sufficient jet に関する定理よりでてくる。[F2] において次の定理を得た：

C^0-sufficiencyに関する定理 ~~4.2~~ 2.2

$\pi = \pi^{r+k}_r : J^{r+k}(m, n) \longrightarrow J^r(m, n)$ を自然な射影とする。$m \geq n$ とする。そのとき任意の constructible set $W \subset J^r(m,n)$ に対して以下の条件 (1)−(4) をみたす closed constructible set $\Sigma_W \subset (\pi^{r+n+1}_r)^{-1}(W) \subset J^{r+n+1}(m, n)$ が存在する：

(1) $\dim \Sigma_W < \dim (\pi^{r+n+1}_r)^{-1}(W)$

(2) $j^{r+n+1}f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma_W$ ならば，f をその critical point set $C(f)$ に制限した写像 $f|C(f) : C(f) \to \mathbb{C}^n$ は finite one map である。

(3) $\pi^{-1}(W) - \Sigma_W$ の jet は全て C^0-sufficient.

(4) もし，$f, g \in \mathcal{O}_{m,n}$ の $(r+n+1)$-jet $j^{r+n+1}f(0)$ と $j^{r+n+1}(g(0))$ が $(\pi^{-1})(W) - \Sigma_W$ の同じ連結成分に属すならば，f と g は C^0-同型である。

注意1 constructible set A とは 二つの algebraic set X, Y が存在して $A = X - Y$ とかけるときにいう。

注意2 この定理は，R. Thom [T2] の一般化である。A. N. Varčenko [V] によって次の形にすでに一般化されていることが安藤良文氏により指摘された。W が irreducible algebraic set の場合，充分高い $s > 0$ と proper alg. set $\Sigma_W \subset (\pi^s_r)^{-1}(W)$ が存在して (1)−(4) をみたす。

Varcenko の定理が存在しても，なおかつ定理2.2は次の意味で有効である。 (1) Δ が確定している。(2) Boardman singularities が algebraic set にならず，semi-algebraic 又は constructible set であること。

一方 corank 2 の安定特異点の存在は 次の Lemma より出る。

LEMMA 2.3 complex manifold $M \subset J^k(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ が次の条件をみたすとする。

1) M の全ての jet は C^0-sufficient

2) 任意の f, g such that $j^k f(p), j^k g(q) \in M$ に対して，f at p と g at q は C^0-同値.

そのとき，$j^k f(p) \in M$ かつ，$j^k f$ が p において M に横断的ならば，f at p は 位相安定特異点である。

この lemma は，横断性と位相安定の定義より明らかである。

2.2 と 2.3 より，次の結果を得る：

PROPOSITION 2.4

$\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ の 位相安定特異点は必ず存在して，かつその位相型は唯一つである。

証明 $W = S_2 \subset J^1(8,6)$ に定理2.2を適用し,

$$M = ((\pi_1^8)^{-1}(S_2) - \Sigma_W) \times \mathbb{C}^8 \times \mathbb{C}^6 \subset J^8(\mathbb{C}^8, \mathbb{C}^6)$$

とおく。S_2 が連結な複素多様体であることより M も連結となる。従って定理2.2より M は lemma 2.3 の条件をみたす。$\mathrm{codim}\, M = \mathrm{codim}\, S_2 = 8$ であることを考慮すると, M に属する元は topologically stable map germ であり, その top. type は唯一つである。 Q.E.D

Proposition 2.4 より $\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ の top. stable singularities を分類するには, corank 1 の特異点を分類し, corank 2 の位相安定特異点を唯一つでいいからみつければよいことがわかる。

§3 余階数1の位相安定特異点の分類

$f : (\mathbb{C}^8, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^6, 0)$ が余階数1だとする。すなわち, $\mathrm{rank}\,(\partial f_i/\partial x_j(0)) = 5$. すると $\mathbb{C}^8$ の新しい座標として $(X_1, \cdots, X_8)$, $\mathbb{C}^6$ の新しい座標として $(Y_1, \cdots, Y_6)$ を適当にとることにより $f = (f_1, \cdots, f_6) : \mathbb{C}^8 \longrightarrow \mathbb{C}^6$ は次の形になる。

$$\begin{cases} Y_i = f_i(X) = X_i & i=1,\cdots,5 \\ Y_6 = f_6(X) & \text{で}\quad \dfrac{\partial f_6}{\partial X_6}(0)=\dfrac{\partial f_6}{\partial X_7}(0)=\dfrac{\partial f_6}{\partial X_8}(0)=0. \end{cases}$$

$\pi: J^r(\mathbb{C}^8, \mathbb{C}^6) \longrightarrow J^r(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ なる射影を次の様に定義する： $\pi(j^r f(p)) = j^r f_{6,p}(p_6, p_7, p_8)$

但し，$f=(f_1,\cdots,f_6)$ で，$p=(p_1,\cdots,p_8)\in\mathbb{C}^8$ に対して，$f_{6,p}: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^1$ を $f_{6,p}(x, y, z) = f_6(p_1, p_2, \cdots, p_5, x, y, z)$ で定義する。

LEMMA 3.1 ある constructible set $\Sigma \subset J^r(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ で $\operatorname{codim}\Sigma > 8$ であるものに対して，

$$j^r f(p) \in \pi^{-1}(\Sigma)$$

となるものは，位相安定特異点の候補からはずしてよい。

証明 もし $j^r f(p) \in \pi^{-1}(\Sigma)$ でかつ f at p が位相安定であっても，それと同じ C^0-type のものが必ず $J^r(\mathbb{C}^8, \mathbb{C}^6)$ の中に存在する。(transversality theorem) Q.E.D

定理 3.2 $m \geq n$ とする。$\operatorname{codim} V = k$ なる任意の constructible set $V \subset J^r(m,n)$ に対して次の条件をみたす closed constructible set $\Sigma \subset J^{(k+1)(n+1)+r}(m,n)$

が存在する。

(1) $\dim \Sigma < \dim (\pi_r^{(k+1)(n+1)+r})^{-1}(V)$

(2) $(\pi_r^{(k+1)(n+1)+r})^{-1}(V) - \Sigma$ の開近傍 O in $J^{(k+1)(n+1)+r}(m,n)$ が存在して 次の条件をみたす: もし $j^r f(0) \in O$ ならは $j^r f(0)$ は C^0-~~del~~ sufficient jet で $f|C(f)$: $C(f) \to \mathbb{C}^n$ は finite one map

証明.

$W_1 = J^r(m,n)$ とおいて C^0-sufficiency に関する定理2.2を適用すると, 定理2.2の条件をみたす closed constructible set (ie algebraic set) $\Sigma_{W_1} \subset J^{n+r+1}$ が存在する.

2.2 の条件(1) より $\operatorname{codim} \Sigma_{W_1} \geqq 1$

$W_2 = \Sigma_{W_1}$ とおき, 同様の操作をくりかえすと, closed constructible set $\Sigma_{W_2} \subset (\pi_{n+1+r}^{2(n+1)+r})^{-1}(W_1)$ が存存して定理2.2の条件をみたす そして $\operatorname{codim} \Sigma_{W_2} \geqq 2$

これを帰納的にくりかえして, $\Sigma_{W_{k+1}} \subset J^{(k+1)(n+1)+r}(m,n)$ を得る. そして $\operatorname{codim} \Sigma_{W_{k+1}} \geqq k+1$.

$\tilde{O} = J^{(k+1)(n+1)+r}(m,n) - \Sigma_{W_{k+1}}$ とおくと $\tilde{O}$ は次の条件をみたす。

(2′) $j^r f(0) \in \tilde{O} \Rightarrow j^r f(0)$ は sufficient かつ, $f|C(f)$: $C(f) \to \mathbb{C}^n$ は finite-one map

一方 V に対して，C^0-k-sufficiency に関する定理2.2により，closed constructible set $\Sigma_V \subset (\pi^{n+r+1}_{r})^{-1}(V)$ で定理2.2の条件をみたすものが存在する。

$$\Sigma = (\pi^{(k+1)(n+1)+r})^{-1}(\Sigma_V) \cup (\Sigma_{W_{k+1}}) \cap \pi^{-1}(V)$$

とおけば Σ と $\widetilde{C}$ は上の条件 (1) (2) をみたす。

Q.E.D

LEMMA 3.3 充分高い $r>0$ と closed constructible set $\Sigma_1 \subset J^r(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ が存在して次の条件をみたす：

(1) $\mathrm{codim}\, \Sigma_1 > 8$

(2) $j^r f(p) \notin \Sigma_1 \Rightarrow j^r f(p)$ は C^0-sufficient かつ p は f の isolated singularity.

証明．lemma 3.2 において $V = J^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ とせよ。

LEMMA 3.4. Σ_1 を上の lemma のそれとする。そのとき任意の constructible set $C_1, \ldots, C_\ell \subset J^r(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1) - \Sigma_1$ に対して，$J^r(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ の Whitney stratification $\mathcal{S}$ で次の条件をみたすものがある：

(1) $\mathcal{S}$ は $C_1, \ldots, C_\ell$ を substratified set としてもつ。

(2) 任意の strata $X \in \mathcal{S}$ に対して $j^r f(p), j^r g(q)$

$\in X$ ならば, f at p と g at q は位相同型

(3) $\mathcal{S}$ の strata は全て constructible で strata の個数は有限である。

証明 は, [F₃] を参照のこと。そのとき上の Lemma 3.3 を使う。

定義 3.5 $L^r(3,1)$ ~~$\in J^r(3,1)$~~ を analytic diffeomorphism の jets $L^r(3) \subset J^r(3,3)$ と $L^r(1) \subset J^r(1,1)$ の直積とする。$L^r(3,1) = L^r(3) \times L^r(1)$。$L^r(3,1)$ はリー群となり $J^r(3,1)$ に analytic に作用する。$j^r f(0)$ と $(j^r h_1(0), j^r h_2(0)) \in L^r(3) \times L^r(1)$ に対して $(j^r h_1(0), j^r h_2(0)) \cdot j^r f(0) = j^r(h_2 \circ f \circ h_1)(0))$.

orbit $\boxed{\text{codim } f} \equiv \lim_{r \to \infty} \text{codim } L^r(3,1)(j^r f(0))$ in $J^r(3,1)$ とおく。

LEMMA 3.6 (Arnold. Saito, Mather Siersma)

(1) orbit codim ≤ 8 の singularity は次の $A_1 \sim A_6$, $D_4 \sim D_6$, E_6 のいずれかに解析的に同値である。

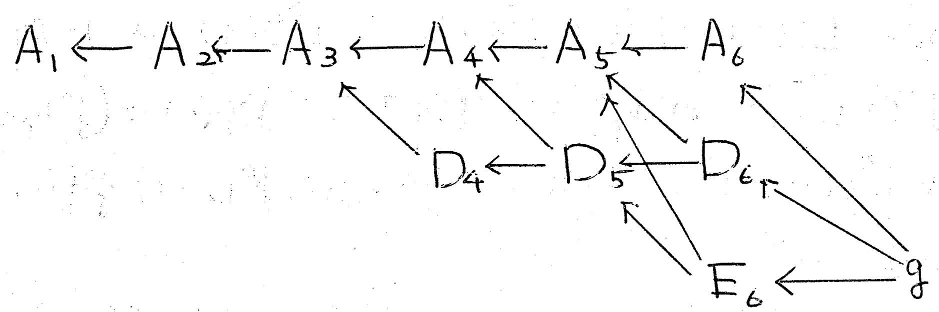
$$\begin{cases} A_k : X_8^{k+1} + X_6^2 + X_7^2 \\ D_k : X_8^{k-1} + X_8 X_7^2 + X_6^2 \\ E_6 : X_8^4 + X_7^3 + X_6^2 \end{cases}$$

(2) orbit codim >8 の任意の $g \in \mathcal{O}_3$ に対して，

$$L^r(3,1)(j^r g(0)) \subset \overline{A_6 \cup D_6 \cup E_6}$$

但しここで A_k, D_k, E_k という記号は，それぞれの orbit をあらわしている。

(3) (2) を図示すると次のようになる。集合 B, C に対して $B \subset \overline{C}$ なる関係を $B \to C$ であらわす。g の $L^r(3,1)$ orbit をやはり g であらわすと，orbit codim $g>8$ ならば次のようになる。



LEMMA 3.7 任意の jet $z \in J^r(m,n)$ に対して，$L^r(m,n)(z)$ は constructible set である。特に $A_1, \ldots, E_6$ は constructible set である。

証明については [L] (§4 prop 1. p 18) を参照の事。

以上の準備のもとに corank 1 の位相安定特異点の分類定理を示す。

定理3.8 (1) $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^1$ の $A_1, \cdots, A_6, D_4, D_5, D_6$ E_6 type の singularity の analytically versal deformation $\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ が存在し，それらは，Introduction の定理中に与えたものである。又それらは analytically stable singularity となる。従って特に位相安定である。

(2) $\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ の余階数1の top. stable sing は $A_1 \cdots E_6$ の analytically versal deformation に位相同型なものに限る。

証明 (1) 例えば [N-F], Arnold [ ] 参照

(2) π と Σ_1 を Lemma 3.3 で得られるものとする。Lemma 3.7 によると $A_k, D_k, \cdots E_6$ は constructible である。又 $\mathrm{codim}\, A_6 = \mathrm{codim}\, D_6 = \mathrm{codim}\, E_6 = 8$ であることがわかっている。所で Lemma 3.4 によると，$A_1, \cdots, E_6$ を subcomplex とするような $J^r(\mathbb{C}^3, 1) - \Sigma_1$ の stratification $\mathcal{S}$ が存在して，一つの strata に属する singularity はみな同じ位相型となる。今

$$\Sigma = \bigcup_{\substack{X \in \mathcal{S} \\ X \cap (A_1 \cup \cdots \cup E_6) = \phi}} X$$

とおくと Σ は constructible set で，$\mathrm{codim}\, \Sigma > 8$.

(なぜならば Σ は $X \cap (A_1 \cup \cdots \cup E_6) = \phi$ なる constructible set の有限和で，Lemma 3.6によると $J^r(3,1) = \overline{A_1 \cup \cdots \cup E_6}$,

故に $X \subset \overline{E_6} - E_6$ 又は $X \subset \overline{A_6} - A_6$, $X \subset \overline{D_6} - D_6$ 故に
codim $X >$ codim $E_6 = 8$)

Lemma 3.1 によると $\pi^{-1}(\Sigma)$ ~~となるよう~~ に属すような特異点は 位相安定特異点の候補から除外してよい。従って (1) で与えたものしかない。

Q.E.D

§4 AE type の特異点は topologically stable である。(予想)

この節では, AE type の特異点が位相安定であることの証明の ~~esquisse~~ 方針 を与える。

LEMMA (Mather [M2]) (1) $F : \mathbb{C}^{m+k} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+k}$ が analytically stable map とする。すると $\mathbb{C}^{m+k}$ と $\mathbb{C}^{n+k}$ のある stratifications $\mathcal{S}(\mathbb{C}^{m+k})$, $\mathcal{S}(\mathbb{C}^{n+k})$ が存在して, F は stratified map になる。

(2) $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ を ~~任意の写像とする~~ 次の図式が可換になるような写像であるとする。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^m \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{C}^{m+k} \arrow[d, "F"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "i"] & \mathbb{C}^{n+k} \end{tikzcd}$$

ここに $i(x) = (x, 0)$ なる自然な injection.

そのとき，i が $\mathcal{S}(\mathbb{C}^{m+k})$，$\mathcal{S}(\mathbb{C}^{n+k})$ の全ての strata に横断的ならば，f は位相安定である。

この Lemma が Mather の "topologically stable maps are dense" の証明の key である。

LEMMA. 次の写像 $\mathbb{C}^{12} \to \mathbb{C}^{10}$ は analytically stable である：$F(t_1, t_2, t_3, t_4, u_1, u_2, u_3, u_4, x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, u, \sum_{i=1}^{4} x_i^2, \sum_{i=1}^{4} (a_i + u_i) x_i^2 + t_i x_i)$　但し a_1, a_2, a_3, a_4 は Introduction における (a_1, a_2, a_3, a_4) の条件をみたすものとする。

これは Mather stability IV lemma(5.9) (p 242) を適用するとすぐでる。

Æ type の map を $f : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^6$ でかこう：

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4, x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, \sum x_i^2, \sum (a_i + u_i) x_i^2 + t_i x_i).$$

さて，f と F は次の図式で可換となる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^8 & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^{12} \\ \downarrow f & & \downarrow F \\ \mathbb{C}^6 & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^{10} \end{array} \qquad i(t, x) = (t, 0, x)$$

非常にはんざつな計算により，次の系列が stratify できることがわかる。(であろう。以下全て　だろう付)

$$
\begin{array}{c}
\mathbb{C}^4_t \times \mathbb{C}^4_u \times \mathbb{C}^4_x = \mathbb{C}^{12} \\
\downarrow F \\
\mathbb{C}^4_t \times \mathbb{C}^4_u \times \mathbb{C}^2_y = \mathbb{C}^{10} \\
\downarrow \pi \\
\mathbb{C}^4_u
\end{array}
$$

しかも一番下の $\mathbb{C}^4_u$ はそのまま一つの strata となる。このことは i が $\mathbb{C}^{12}$，$\mathbb{C}^{10}$ の全ての strata に transversal であることを示している。Lemma 4.1 によると，f は位相安定である。

以上。

上の stratification の構成又は(それができれば) AE type の stability の別証明を他の所に出すつもりである。

以上。

文献

[F₁] 福田拓生 Topologically stable unfolding について in "C^∞写像のトポロジー"(数理研講究録 No257)

[F₂] 福田拓生 Topologically stable unfolding II. in "特異点の幾何学"(数理研講究録 1976)

[F₃] T. Fukuda Types topologiques des polynômes. Publ I.H.E.S. No 46 (1976)

[L] H. I. Levine Singularities of differentiable mappings, Proceedings of Liverpool singularities I, Lecture notes in Math. 192. Springer-Verlag.

J Mather : Stability of differentiable mappings. I–VI

[M_2] : Stratifications and mappings, Dynamical system (Proc, Sympos Univ Bahia, Salvador, 1971) Academic press.

[N-F] : 野口広,-福田 : 初等カタストロフィー (共立全書).

[T_1] : René Thom : Ensembles et morphismes stratifiés Bull. A.M.S. 75 (1969) 240-284.

[T_2] : Local topological properties of differentiable mappings, Differential Anal. (Colloq. Bombay 1964), Oxford univ press

[V] : Varčenco : Local topological properties of diff. mappings : Math. USSR Izvestija vol 8 (1974) No5